रैखिक असमिकाएँ

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» असमिकाएँ क्या हैं?

प्रश्न 1 (आसान). अगर रमेश की उम्र 18 साल से ज़्यादा है, तो इसे असमिका में कैसे लिखेंगे? (जहाँ रमेश की उम्र 'y' है)

उत्तर – y > 18

प्रश्न 2 (आसान). 20 और 15 के बीच 'कम' (<) या 'ज़्यादा' (>) का सही चिन्ह लगाओ।

उत्तर – 20 > 15

प्रश्न 3 (मध्यम). एक दुकान में कॉपी का दाम 25 रुपये है। अगर तुम्हारे पास 100 रुपये हैं और तुम 'k' कॉपियाँ खरीदना चाहते हो, तो इसे असमिका के रूप में कैसे लिखोगे?

उत्तर – 25k 100

प्रश्न 4 (कठिन). रेशमा के पास 120 रुपये हैं। वह कुछ रजिस्टर और पेन खरीदना चाहती है। रजिस्टर का मूल्य 40 रुपये और पेन का मूल्य 20 रुपये है। अगर रजिस्टरों की संख्या 'x' और पेनों की संख्या 'y' हो, तो वह कुल कितने रुपये खर्च कर सकती है, इसे असमिका के रूप में लिखो।

उत्तर – 40x + 20y 120

» रैखिक असमिकाओं के प्रकार

प्रश्न 5 (आसान). असमिका 7y - 3 > 10 किस प्रकार की है?

उत्तर – एक चर वाली रैखिक असमिका

प्रश्न 6 (आसान). असमिका 2a + 5b 15 किस प्रकार की है?

उत्तर – दो चर वाली रैखिक असमिका

प्रश्न 7 (मध्यम). क्या असमिका t^3 - 2t < 7 एक रैखिक असमिका है? कारण बताइए।

उत्तर – नहीं, क्योंकि चर 't' की उच्चतम घात 3 है, जो 1 नहीं है।

» असमिका का हल और हल समुच्चय

प्रश्न 8 (आसान). हल कीजिए: x + 5 > 8, जब x एक प्राकृत संख्या है।

उत्तर – {4, 5, 6, ...}

प्रश्न 9 (आसान). हल कीजिए: 2y 10, जब y एक पूर्णांक है।

उत्तर – {..., 3, 4, 5}

प्रश्न 10 (मध्यम). हल कीजिए: 5x - 3 < 7, जब x एक पूर्णांक है।

उत्तर – {..., 0, 1}

प्रश्न 11 (कठिन). हल कीजिए: -2x 6, जब x एक वास्तविक संख्या है।

उत्तर – (-, -3]

» असमिकाएँ हल करने के नियम

प्रश्न 12 (आसान). असमिका x + 3 < 7 को हल करें।
उत्तर – x < 4

प्रश्न 13 (आसान). असमिका 5x 25 को हल करें।
उत्तर – x 5

प्रश्न 14 (मध्यम). असमिका -3x + 4 16 को हल करें।
उत्तर – x -4

प्रश्न 15 (कठिन). असमिका 7 - 2x > 11 को हल करें।
उत्तर – x < -2

» एक चर राशि वाली रैखिक असमिकाओं को हल करना

प्रश्न 16 (आसान). 3x > 9 को हल कीजिए जब x एक प्राकृत संख्या है।
उत्तर – {4, 5, 6, ...}

प्रश्न 17 (आसान). x + 5 7 को हल कीजिए जब x एक पूर्णांक है।
उत्तर – {..., -1, 0, 1, 2}

प्रश्न 18 (मध्यम). 2x - 1 < 5 को हल कीजिए जब x एक वास्तविक संख्या है।
उत्तर – (-, 3)

प्रश्न 19 (कठिन). 7 - 3x 10 को हल कीजिए जब x एक पूर्णांक है।
उत्तर – {..., -2, -1}

» असमिका के हल का संख्या रेखा पर निरूपण

प्रश्न 20 (आसान). असमिका 'x > 2' को संख्या रेखा पर कैसे निरूपित करेंगे?
उत्तर – संख्या रेखा पर '2' पर एक 'खुला गोला' बनाकर, और '2' से दाईं ओर की रेखा को छायांकित करेंगे।

प्रश्न 21 (आसान). असमिका 'x -1' को संख्या रेखा पर कैसे निरूपित करेंगे?
उत्तर – संख्या रेखा पर '-1' पर एक 'भरा हुआ गोला' बनाकर, और '-1' से बाईं ओर की रेखा को छायांकित करेंगे।

प्रश्न 22 (मध्यम). असमिका '3x + 2 11' को हल कीजिए और संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।
उत्तर – पहले हल करेंगे: '3x 9' तो 'x 3'। संख्या रेखा पर '3' पर एक 'भरा हुआ गोला' बनाकर, और '3' से दाईं ओर की रेखा को छायांकित करेंगे।

प्रश्न 23 (कठिन). असमिका '-2x + 4 < -6' को हल कीजिए और संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।
उत्तर – पहले हल करेंगे: '-2x < -10'। अब '-2' से भाग देने पर असमिका का चिन्ह पलट जाएगा, तो 'x > 5'। संख्या रेखा पर '5' पर एक 'खुला गोला' बनाकर, और '5' से दाईं ओर की रेखा को छायांकित करेंगे।

» वास्तविक जीवन की समस्याओं में रैखिक असमिकाओं का अनुप्रयोग

प्रश्न 24 (आसान). एक कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या 40 से ज़्यादा नहीं हो सकती। यदि 25 लड़कियाँ हैं, तो लड़कों की अधिकतम संख्या क्या हो सकती है?
उत्तर – अधिकतम 15 लड़के।

प्रश्न 25 (आसान). तुम्हारे पास ₹200 हैं। यदि तुम ₹80 की एक किताब खरीदते हो, तो तुम एक कॉपी (जो ₹30 की है) कितनी खरीद सकते हो?
उत्तर – अधिकतम 4 कॉपियाँ।

प्रश्न 26 (मध्यम). पांच क्रमागत सम संख्याओं का योग 60 से कम है। यदि सबसे छोटी सम संख्या 'x' है, तो 'x' के संभावित मान ज्ञात करें।

उत्तर – x < 10। संभावित मान 2, 4, 6, 8 (x एक सम संख्या है)।

प्रश्न 27 (कठिन). एक त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा सबसे छोटी भुजा की तीन गुनी है और तीसरी भुजा सबसे बड़ी भुजा से 2 सेमी कम है। यदि त्रिभुज का परिमाप न्यूनतम 61 सेमी है, तो तीसरी भुजा की न्यूनतम लंबाई ज्ञात करें।

उत्तर – सबसे छोटी भुजा की लंबाई 'x' सेमी है। तो सबसे बड़ी भुजा '3x' सेमी और तीसरी भुजा '3x - 2' सेमी है। परिमाप x + 3x + (3x - 2) 61 => 7x - 2 61 => 7x 63 => x 9। तीसरी भुजा की न्यूनतम लंबाई 3(9) - 2 = 27 - 2 = 25 सेमी।

» दो असमिकाओं का निकाय हल करना

प्रश्न 28 (आसान). हल कीजिए: x > 3 और x < 7

उत्तर – 3 < x < 7

प्रश्न 29 (आसान). हल कीजिए: x 5 और x > 0

उत्तर – 0 < x 5

प्रश्न 30 (मध्यम). हल कीजिए: 2x - 1 < 5 और x + 3 4

उत्तर – 1 x < 3

प्रश्न 31 (कठिन). हल कीजिए और संख्या रेखा पर दर्शाइए: -8 5x - 3 < 7

उत्तर – -1 x < 2

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. एक कक्षा में विद्यार्थियों की अधिकतम संख्या 40 है। अगर हम विद्यार्थियों की संख्या को 'x' से दर्शाएँ, तो इसे असमिका के रूप में कैसे लिखेंगे?

› सबसे पहले पहचानो कि यहाँ क्या 'बराबर' है या 'बराबर नहीं' है। यहाँ 'अधिकतम संख्या 40' है, यानी 40 से ज़्यादा नहीं हो सकती।

› अब देखो कि कौन-सा चिन्ह सबसे सही बैठेगा। अगर 'अधिकतम 40' है, तो इसका मतलब '40 से कम' भी हो सकता है और '40 के बराबर' भी हो सकता है।

› तो हम 'कम या बराबर' () का चिन्ह इस्तेमाल करेंगे।

› विद्यार्थियों की संख्या 'x' है। तो, x और 40 के बीच इस चिन्ह का प्रयोग करें।

उत्तर – x 40

उदाहरण 2. पहचानिए कि निम्न असमिकाएं किस प्रकार की हैं: (a) 5x - 7 < 12 (b) x² + 2x > 5 (c) 3x + 4y 20

› पहला उदाहरण है, '5x - 7 < 12'। यहाँ चर क्या है? सिर्फ 'x'। और 'x' की घात क्या है? 1। तो यह 'एक चर वाली रैखिक असमिका' है।

› दूसरा उदाहरण है, 'x² + 2x > 5'। यहाँ चर तो सिर्फ 'x' है, लेकिन 'x' की सबसे बड़ी घात क्या है? वह '2' है। तो यह 'द्विघातीय असमिका' है, 'रैखिक' नहीं।

› तीसरा उदाहरण है, '3x + 4y 20'। यहाँ कौन-कौन से चर हैं? 'x' और 'y'। दोनों की घात क्या है? 1। तो यह 'दो चर वाली रैखिक असमिका' है।

उत्तर – (a) एक चर वाली रैखिक असमिका (b) द्विघातीय असमिका (c) दो चर वाली रैखिक असमिका

उदाहरण 3. हल कीजिए: 30x < 200, जब x एक प्राकृत संख्या है।

› हमें असमिका दी गई है: 30x < 200

› अब, हम दोनों पक्षों को 30 से भाग देंगे (यह एक धनात्मक संख्या है, इसलिए चिह्न नहीं बदलेगा): x < 200/30

› इसे सरल करने पर हमें मिलता है: x < 20/3

› जब हम 20 को 3 से भाग देते हैं, तो हमें लगभग 6.66 मिलता है। तो, x < 6.66...

› समस्या में दिया गया है कि x एक प्राकृत संख्या है, जिसका मतलब है कि x को 1, 2, 3, 4, 5, 6... होना चाहिए।

› तो, 6.66 से छोटी प्राकृत संख्याएँ हैं: 1, 2, 3, 4, 5, 6।

› अतः, हल समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5, 6} है।

उत्तर – हल समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5, 6}

उदाहरण 4. असमिका -2x + 5 < 13 को हल करें।

› सबसे पहले, 5 को दूसरी तरफ ले जाएँगे (घटाएँगे): -2x < 13 - 5

› तो, -2x < 8

› अब, x का मान निकालने के लिए -2 से भाग देना होगा। यहाँ ध्यान से देखो, हम एक ऋणात्मक संख्या (-2) से भाग दे रहे हैं।

› इसलिए, असमिका का चिह्न बदल जाएगा: x > 8 / (-2)

› तो, x > -4

उत्तर – x > -4

उदाहरण 5. असमिका 5x - 3 < 3x + 1 को हल कीजिए, जब x एक पूर्णांक है और जब x एक वास्तविक संख्या है।

› पहला चरण: असमिका को सरल करना शुरू करते हैं। '5x - 3 < 3x + 1' में, पहले हम दोनों तरफ '3' जोड़ेंगे। '5x - 3 + 3 < 3x + 1 + 3' मतलब '5x < 3x + 4' हो गया।

› दूसरा चरण: अब '3x' को बाईं ओर लाते हैं। इसके लिए दोनों तरफ से '3x' घटाएंगे। '5x - 3x < 3x + 4 - 3x' मतलब '2x < 4' हो गया।

› तीसरा चरण: अब 'x' का मान निकालने के लिए दोनों तरफ '2' से भाग देंगे। '2x/2 < 4/2' तो हमें मिला 'x < 2'। यहाँ हमने धनात्मक संख्या से भाग दिया है, तो चिह्न नहीं बदलेगा।

› चौथा चरण (जब x एक पूर्णांक है): 'x < 2' का मतलब है कि 'x' का मान 2 से छोटा कोई भी पूर्णांक हो सकता है। तो हल समुच्चय होगा: {..., -3, -2, -1, 0, 1}। देखो, '1' तक ही, क्योंकि 2 से छोटा चाहिए।

› पांचवा चरण (जब x एक वास्तविक संख्या है): जब 'x' एक वास्तविक संख्या है और 'x < 2', तो इसका मतलब है कि 2 से छोटी सारी वास्तविक संख्याएँ, चाहे वो दशमलव में हों या भिन्न में। इसे हम अंतराल रूप में लिखते हैं: '(-, 2)'। यह कोष्ठक '(' बताता है कि '2' शामिल नहीं है।

उत्तर – जब x पूर्णांक है, तो हल समुच्चय {..., -3, -2, -1, 0, 1} है। जब x वास्तविक संख्या है, तो हल समुच्चय (-, 2) है।

उदाहरण 6. असमिका 2x - 1 < 5 को हल कीजिए और इसके हल को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

› पहला कदम: असमिका को हल करते हैं। हमें दिया है '2x - 1 < 5'।

› अब, इस '-1' को दूसरी तरफ ले जाते हैं, तो '2x < 5 + 1' हो जाएगा।

› तो '2x < 6' बन गया।

› अब 'x' का मान निकालने के लिए, दोनों तरफ '2' से भाग देते हैं: 'x < 6/2' मतलब 'x < 3'।

› दूसरा कदम: इस हल 'x < 3' को संख्या रेखा पर दिखाते हैं।

› हम संख्या रेखा पर '3' बिंदु पर एक 'खाली गोला' (open circle) बनाएंगे, क्योंकि 'x' 3 से 'छोटा' है, 'बराबर' नहीं।

› और फिर, 3 से 'छोटी' सभी संख्याओं की तरफ, यानी बाईं ओर, एक तीर के साथ रेखा को 'छायांकित' करेंगे, जो अनंत तक जाएगी। यह दिखाएगा कि 'x' का मान 3 से कम कुछ भी हो सकता है।

उत्तर – हल 'x < 3' है, जिसे संख्या रेखा पर '3' पर एक खुला गोला और फिर बाईं ओर छायांकित रेखा से दर्शाया जाएगा।

उदाहरण 7. रवि ने पहली दो इकाई परीक्षाओं में 70 और 75 अंक प्राप्त किए हैं। वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए, जिसे वह तीसरी इकाई परीक्षा में पाकर 60 अंक का न्यूनतम औसत प्राप्त कर सके।

› मान लीजिए तीसरी इकाई परीक्षा में रवि को 'x' अंक मिलते हैं।

› सभी तीन परीक्षाओं का औसत होगा: (70 + 75 + x) / 3

› प्रश्न के अनुसार, यह औसत 'न्यूनतम 60 अंक' होना चाहिए, यानी 60 या 60 से अधिक।

› तो असमिका बनेगी: (70 + 75 + x) / 3 60

› इसे हल करते हैं: (145 + x) / 3 60

› दोनों तरफ 3 से गुणा करने पर: 145 + x 180

› दोनों तरफ से 145 घटाने पर: x 180 - 145

› x 35

उत्तर – रवि को तीसरी इकाई परीक्षा में कम से कम 35 अंक प्राप्त करने होंगे।

उदाहरण 8. निम्नलिखित असमिका निकाय को हल कीजिए और हल को संख्या रेखा पर दर्शाइए: 3x - 7 < 5 + x और 11 - 5x 1

› पहला चरण: पहली असमिका '3x - 7 < 5 + x' को हल करें। 'x' वाले पद एक तरफ और संख्याएँ एक तरफ ले जाएँगे। '3x - x < 5 + 7' मतलब '2x < 12'. अब दोनों तरफ 2 से भाग देने पर, 'x < 6' आता है। यह हमारा पहला हल है।

› दूसरा चरण: अब दूसरी असमिका '11 - 5x 1' को हल करें। फिर से, 'x' वाले पद एक तरफ: '-5x 1 - 11' मतलब '-5x -10'. अब ध्यान देना बच्चों, हमें '-5x' नहीं, 'x' चाहिए। जब हम एक ऋणात्मक संख्या (यहां -5) से भाग देते हैं, तो असमिका का चिह्न 'उलट' जाता है। तो '-5x / -5 -10 / -5', जिससे हमें मिलता है 'x 2'. यह हमारा दूसरा हल है।

› तीसरा चरण: अब हमारे पास दो हल हैं: 'x < 6' और 'x 2'. हमें वो 'x' चाहिए जो 'दोनों' शर्तों को पूरा करे। मतलब 'x' 6 से छोटा भी हो और 'x' 2 के बराबर या उससे बड़ा भी हो। इसे हम '2 x < 6' लिखि सकते हैं।

› चौथा चरण: संख्या रेखा पर दर्शाना। 'x 2' के लिए, संख्या 2 पर एक 'भरा गोला' (closed circle) बनाएंगे और दाईं ओर की संख्या रेखा को गहरा करेंगे। 'x < 6' के लिए, संख्या 6 पर एक 'खाली गोला' (open circle) बनाएंगे और बाईं ओर की संख्या रेखा को गहरा करेंगे।

› पांचवां चरण: अब देखो, दोनों रेखाएँ कहाँ मिलती हैं? वे 2 से शुरू होकर 6 तक जाती हैं। तो 2 पर भरा गोला और 6 पर खाली गोला लगाकर, उनके बीच की रेखा को गहरा कर देंगे। यही हमारा 'उभयनिष्ठ हल' है।

उत्तर – हल है: 2 x < 6. संख्या रेखा पर 2 पर भरा गोला और 6 पर खाली गोला लगाकर, उनके बीच के हिस्से को छायांकित करें।

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• यह अवधारणा गणित में बहुत महत्वपूर्ण है और आगे की कक्षाओं में भी काम आएगी, इसलिए इसके प्रतीकों और मूलभूत अंतर को समीकरणों से अच्छे से समझ लेना।

• यह भाग सीधे तौर पर बड़े प्रश्न के रूप में नहीं आता, लेकिन असमिकाओं को हल करते समय सही प्रकार की पहचान करना बहुत महत्वपूर्ण है, ताकि आप सही नियम लगा सकें।

• बोर्ड परीक्षा में, ऋणात्मक संख्या से गुणा या भाग करते समय असमिका का चिह्न बदलना कभी न भूलें, यह एक बहुत आम गलती है जिस पर नंबर कट जाते हैं।

• बोर्ड परीक्षा में असमिकाएँ हल करते समय ऋणात्मक संख्या से गुणा या भाग करते समय चिह्न बदलना कभी न भूलें, यह सबसे आम गलती है जिस पर नंबर कटते हैं।

• बोर्ड परीक्षा में, आपको अक्सर 'solution set' को 'प्राकृत संख्या', 'पूर्णांक' या 'वास्तविक संख्या' के संदर्भ में लिखने के लिए कहा जाएगा, खासकर 'वास्तविक संख्या' के लिए 'interval notation' सही से लिखना सीख लो। 'Reprint 2025-26' में उदाहरण 2 और 3 जैसे सवाल बहुत आते हैं।

• असमिका के हल को संख्या रेखा पर निरूपित करना अक्सर 2-3 नंबर के सवालों में आता है, खासकर तब जब असमिका में नकारात्मक संख्या से गुणा या भाग करना पड़े, क्योंकि वहां असमिका का चिन्ह पलटने वाली गलती बच्चे करते हैं। 'यह उदाहरण 6' और 'उदाहरण 7' जैसे प्रश्न सीधे बोर्ड परीक्षा में पूछे जाते हैं।

• यह सवाल बोर्ड परीक्षा में 4 से 6 अंकों का ज़रूर आता है! खासकर वे सवाल जहाँ तापमान या मिश्रण जैसे 'शब्दों वाली समस्याएँ' (Word Problems) होती हैं, जिनमें हमें खुद असमिकाएँ बनानी पड़ती हैं और फिर हल करके उनका 'उभयनिष्ठ परिसर' (Common Range) निकालना होता है।

एक नज़र में रिवीज़न

› असमिकाएँ: जहाँ '=' नहीं, बल्कि '<', '>', '', '' चिन्ह होते हैं।

› रैखिक असमिकाएँ: एक चर (x) या दो चर (x,y) हों, चर की घात हमेशा 1 हो।

› असमिका का हल, हल समुच्चय; ऋणात्मक से गुणा/भाग पर चिह्न बदलता है।

› ऋणात्मक संख्या से गुणा/भाग करने पर असमिका का चिह्न बदल जाता है।

› असमिका हल करते समय ऋणात्मक गुणा/भाग पर चिह्न पलटना न भूलें।

› हल को संख्या रेखा पर खुला/भरा गोला और छायांकित करके दिखाओ।

› दो असमिकाओं को अलग हल कर, उभयनिष्ठ हल संख्या रेखा पर दर्शाएँ।